Mini-curso: Geometria Simplética e Sistemas Hamiltonianos

Umberto Hryniewicz - UFRJ

Muitos modelos matemáticos criados para descrever fenômenos físicos são baseados em "princípios variacionais". Intuitivamente, tais princípios nos dizem que a natureza se apresenta de forma que certas quantidades físicas (funcionais) assumam valores críticos, em geral mínimos. Por exemplo, do princípio de Fermat se pode deduzir as leis de reflexão e refração da luz, as equações das geodésicas decorrem de um princípio de minimização de comprimento e, mais geralmente, do princípio da menor ação de Maupertuis se deduz a segunda lei de Newton (as outras leis de Newton decorrem de possíveis simetrias do funcional de ação). As equações diferenciais derivadas destes princípios, chamadas de Equações de Euler-Lagrange, podem ser formuladas desde o chamado ponto de vista Hamiltoniano. Nesta formulação, as equações assumem a conhecida forma das Equações de Hamilton.

A Geometria Simplética é o estudo dos espaços onde se pode escrever as equações de Hamilton; um tal espaço é chamado de espaço de fase do sistema Hamiltoniano ou, simplesmente, de variedade simplética. Esta disciplina, fortemente marcada pela sua interdisciplinaridade, se tornou de interesse central no contexto da matemática atual a partir do desenvolvimento de métodos modernos (curvas pseudo-holomorfas, teoria de Floer, teoria simplética de campos etc) que nos permitiram compreender melhor as relações entre uma variedade simplética e os sistemas Hamiltonianos nela definidos.

Nosso objetivo é fazer uma introdução elementar à geometria simplética, tomando como ponto de partida os princípios variacionais da física clássica. Neste trajeto discutiremos a noção de variedade simplética, o teorema de Darboux, funções geradoras, difeomorfismos simpléticos e Hamiltonianos, as equações de Hamilton-Jacobi, o teorema de Poincaré-Birkhoff, e também alguns exemplos importantes como fluxos geodésicos e campos magnéticos.

Referências:

1) V.I. Arnol'd, Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978.

2) D. McDuff and D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology. Oxford University Press, 1998.

3) H. Hofer and E. Zehnder, Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Birkhäuser, 1994.

4) H. Bursztyn e L. Macarini, Introdução à geometria simplética. Publicações Matemáticas, IMPA.