Estabilidade das famílias Anosov.

Autor: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo.

Resumo.

As famílias Anosov forão introduzidas por P. Arnoux e A. Fisher em [1], motivados por generalizar a noção de difeomorfismos Anosov. Neste poster mostraremos que o conjunto formado pelas famílias Anosov é estável. A seguir, falaremos um pouco sobre estas noções:

Dada uma sequencia de variedades Riemannianas M_i para $i \in \mathbb{Z}$, considere a *união disjunta*

$$\mathbf{M} = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} M_i = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} M_i \times i.$$

Definição 0.1. Uma *família de aplicações* definida em $\mathbf{M}$, é uma aplicação $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, tal que, em cada M_i, $f|_{M_i} = f_i : M_i \to M_{i+1}$ é um homeomorfismo. A n-ésima composição f^n é definida em cada M_i como

$$f_i^n := f_{i+n-1} \circ ... \circ f_i : M_i \to M_{i+n}, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{Z}.$$

Se f é uma família de aplicações, então $f^{-1} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ é definida em cada M_i como $f_{i-1}^{-1} : M_i \to M_{i-1}$. Assim, $f_i^{-n} = f_i^{-1} \circ ... \circ f_{i+n-1}^{-1} : M_{i+n} \to M_i, n \geq 1$.

Definição 0.2. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja M_i uma variedade Riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ fixada, determinando a norma $\| \cdot \|_i$. Tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\| \cdot \|$ definidas em $\mathbf{M}$, como sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{M_i} = \langle \cdot, \cdot \rangle_i$ e $\| \cdot \||_{M_i} = \| \cdot \|_i$ para $i \in \mathbb{Z}$. Uma *família Anosov* é uma família de aplicações $(\mathbf{M}, f, \| \cdot \|)$ tal que:

(1) As aplicações $f_i : M_i \to M_{i+1}$ são difeomorfismos de classe C^1;

(2) o fibrado tangente $T\mathbf{M}$ tem uma decomposição contínua $E^s \oplus E^u$ a qual é Df-invariante, isto é, para cada $p \in M$, $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$ com $D_pf(E_p^s) = E_{f(p)}^s$ e $D_pf(E_p^u) = E_{f(p)}^u$, onde T_pM é o espaço tangente no ponto p;

(3) existem constantes $\lambda \in (0, 1)$ e $c > 0$ tais que para cada $n \geq 1$, para cada i, para todo ponto $p \in M_i$, temos:

$$\|D_p(f_i^{-n})(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{para cada vetor } v \in E_p^u,$$

e

$$\|D_p(f_i^n)(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{para cada vetor } v \in E_p^s.$$

Consideremos agora $\mathrm{F}(\mathbf{M})$ o conjunto formado pelas famílias de difeomorfismos definidas em $\mathbf{M}$. Muniremos $\mathrm{F}(\mathbf{M})$ com a topología Whitney. Provaremos que o conjunto das famílias Anosov, que denotamos por $\mathrm{An}(\mathbf{M})$, é um subconjunto aberto de $\mathrm{F}(\mathbf{M})$. Além disso, mostraremos algumas propriedades destas famílias e varios exemplos interesantes.

Este resultado faz parte do meu trabalho de tese de doutorado em matemática no IME-USP.

References

[1] P. Arnoux and A. M. Fisher. Anosov families, renormalization and nonstationary subshifts. *Erg. Th. and. Dym. Sys.*, 25:661-709, 2005.