Teoria min-max: existência de hipersuperfícies mínimas
Rafael Montezuma

Subvariedades mínimas estão entre os objetos de estudo mais importantes em geometria diferencial. Elas são pontos críticos do funcional de volume de dimensão apropriada; comprimento no caso de curvas, ou área no caso de superfícies.

Resultados sobre a existência de subvariedades mínimas desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da teoria.

A maneira mais natural de produzir tais objetos é minimizando o volume em uma classe fixa de subvariedades. Neste caso, são obtidos pontos críticos de tipo mínimo local. Por outro lado, exitem espaços que não admitem subvariedades mínimas localmente minimizantes.

A teoria min-max, o objeto de estudo central deste minicurso, é uma técnica que pode ser usada para provar a existência de hipersuperfícies mínimas fechadas em variedades Riemannianas. O método consiste em um argumento variacional para o volume de dimensão n sobre classes de *sweepouts* da variedade ambiente, a qual tem dimensão $n + 1$.

A teoria min-max tem sido aplicada para resolver problemas profundos em geometria. Dentre as aplicações, destacam-se a prova da conjectura de Willmore, por Codá Marques e Neves; a prova da conjectura de Freedman, He e Wang sobre a energia de links em $\mathbb{R}^3$, por Agol, Codá Marques e Neves; a existência de uma infinidade de hipersuperfícies mínimas fechadas e mergulhadas em variedades fechadas com curvatura de Ricci positiva, por Codá Marques e Neves; uma prova da extinção em tempo finito do fluxo de Ricci em variedades homotópicamente equivalentes à esfera tridimensional, por Colding e Minicozzi. Ver referências nas notas de aula.