Superfície Mínima de Bour em $\mathbf{E^3}$: Uma interessante generalização.

FERNANDA ALVES CAIXETA[1], Tânia Maria Machado de Carvalho[2]

[1] UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

[2] UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Resumo/Abstract:

Uma superfície mínima no espaço euclidiano tridimensional $\mathbf{E^3}$ é uma superfície regular com curvatura média nula. Apresentamos o estudo da geometria diferencial de uma classe de superfícies mínimas em $\mathbf{E^3}$ denominadas B_m, determinadas por Edmond mile Bour em 1862. Fazemos uma releitura destas superfícies e apresentaremos uma generalização à qual denominamos superfícies B^r_m.

Sejam, $\Upsilon \in U \subset \mathbf{C^3}$, $n \neq -1, 0, 1$ e $i = \sqrt{-1}$. Nestas condições, uma curva de Bour de valor n determinada por $C(\Upsilon) = (\frac{\Upsilon^{n-1}}{n-1} - \frac{\Upsilon^{n+1}}{n+1}, I(\frac{\Upsilon^{n-1}}{n-1} - \frac{\Upsilon^{n+1}}{n+1}), \frac{2*\Upsilon^n}{n})$ é uma curva mínima em $\mathbf{C^3}$. Associadas a esta família de curvas mínimas em $\mathbf{C^3}$, pode-se obter uma família de superfícies mínimas $B_n(\Upsilon)$ em $\mathbf{E^3}$ por meio da representação de Weierstrass tomando $F(\Upsilon) = \Upsilon^{n-2}$, $G(\Upsilon) = \Upsilon$ e $B_n(\Upsilon) = Re \int \Psi(\Upsilon) d\Upsilon$, onde

$$\Psi(\Upsilon) = (\Upsilon^{n-2} - \Upsilon^n, i(\Upsilon^{n-2} - \Upsilon^n), 2\Upsilon^{n-1}) = \frac{dC(\Upsilon)}{d\Upsilon}.$$

Tomando $\Upsilon = ue^{iv}$ segue que

$$B_n(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1}u^{n-1}cos((n-1)v) - \frac{1}{n+1}u^{n+1}cos((n+1)v) \\ \frac{1}{n-1}u^{n-1}sen((n-1)v) - \frac{1}{n+1}u^{n+1}sen((n+1)v) \\ \frac{2}{n}u^n cos(nv) \end{pmatrix}$$

determina uma superfície mínima em $\mathbf{E^3}$, $\forall n \neq -1, 0, 1$. Para a demonstração ver [2]. No que segue mostramos que para $\Upsilon = ue^{iv}$, obtém-se que, $B^r_n(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{r}{n-r}u^{n-r}cos((n-r)v) - \frac{r}{n+r}u^{n+r}cos((n+r)v) \\ \frac{r}{n-r}u^{n-r}sen((n-r)v) - \frac{r}{n+r}u^{n+r}sen((n+r)v) \\ \frac{2r}{n}u^n cos(nv) \end{pmatrix}$

também determina uma superfície mínima em $\mathbf{E^3}$, $\forall n \neq -r, 0, r$ e $r < n$, $r, n \in \mathbf{R}$. Além disso cada superfície B_n^r possui curvatura gaussiana negativa, $\forall n, r \in \mathbf{R}$.

De fato, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por, $E = r^2 u^{2(n-r)}(1+u^{2r})^2$; $F = 0$; $G = r^2 u^{2(n-r-1)}(1+u^{2r})^2$;

A aplicação normal de Gauss é dada por,

$N = \frac{1}{1+u^{2r}}(-2u^r cos(ru), -2u^r sen(ru), 1-u^{2r})$.

Os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$e = -2u^n r^2 cos(nu)$; $f = -2u^{n-1} r^2 sen(nu)$; $g = 2u^{n-2} r^2 cos(nu)$.

Assim, $H = 0$, e a curvatura gaussiana é dada por $K = -\dfrac{(2ru^{3r-n-1})^2}{(1+a^{2r})^4}$.

Obsrve que para $r = 1$ e $n = 2$ obtém-se

$B_2^1(u,v) = B_2(u,v) =$
$= \left(ucos(v) - \dfrac{1}{3}u^3 cos(3v), -usin(v) - \dfrac{1}{3}sin(3v)u^3, u^2 cos(2v)\right)$, que é a forma polar de uma superfície mínima de Enneper. Observe que para $u \in [-1,1]$ e $v \in [o,\pi]$ esta superfície não possui auto interseções.

Para $r = 1$ e $n = 3$, obtém-se

$B_3^1 = \left(\frac{1}{2}u^2 cos(2v) - \frac{1}{4}u^4 cos(4v), -\frac{1}{2}u^2 sin(2v) - \frac{1}{4}u^4 sin(4v), \frac{2}{3}u^3 cos(3v)\right)$.

Esta superfície possui auto interseções para $u \in [-1,1]$ e $v \in [o,\pi]$.

Já a superfície,

$B_3^2 = \left(2u^2 cos(2v) - \frac{2}{5}u^5 cos(5v), -2usin(v) - \frac{2}{5}u^5 sin(5v), \frac{4}{3}u^3 cos(3v)\right)$,

não possui auto interseções para $u \in [-1,1]$ e $v \in [o,\pi]$.

References

[1] Bour, E., *Théorie de la déformation des surfaces.*, Journal de lEcole Imperiale Polytechnique, 22, Cahier 39, 1148, 1862

[2] Güller, E., Y. and Hacsalihoğlu, H. , *Bours theorem on Gauss map in 3-Euclidean space.*, Hacettepe J. Math. Stat., Ankara, 39-4, 515-525, 2010.