Symplectic geometry and contact structures

Carlos José Matheus UEPG

Abstract

We present some fundamental concepts from Symplectic Geometry, its relations with Kähler Geometry and Contact Geometry. We also mention some recent results on the existence and characterization of minimal surfaces in odd dimensional smooth manifolds.

Key words: symplectomorphism, contact angle, Kähler angle, contact hypersurface.

Resumo

Apresentamos conceitos básicos da Geometria Simplética, suas relações com a Geometria Kähleriana e com a Geometria de Contato e mencionamos resultados recentes sobre existência e caracterização de superfícies mínimas em variedades suaves de dimensão ímpar.

Palavras chave: simplectomorfismo, ângulo de contato, ângulo de Kähler, hiperfície de contato.

Segue-se uma breve descrição.

No §1 apresentamos as definições básicas e exibimos exemplos bem conhecidos. Mencionamos a relação entre a Álgebra Linear Complexa e a Álgebra Linear Simplética. Apresentamos o exemplo canônico em $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma simplética $\omega_0 : (u, w) \mapsto -u^t J_0 w$. Mencionamos brevemente a relação entre essa forma simplética e a Mecânica Hamiltoniana.

No §2 apresentamos as definições de variedades simpléticas e simplectomorfismos, exibimos o exemplo canônico em $\mathbb{R}^{2n}$ e enunciamos o Teorema de Darboux. Mencionamos a relação entre a Geometria Complexa e a Geometria Simplética, apresentamos os conceitos básicos da Geometria Kähleriana e terminamos com um resultado de J. Simons sobre subvariedades mínimas em variedades Kählerianas.

No §3 apresentamos as hiperfícies de contato e sua relação com campos vetoriais conformemente simpléticos. Exibimos o exemplo canônico da esfera S^{2n-1} em $\mathbb{R}^{2n}$.

No §4 apresentamos a noção de ângulo de contato, conforme definido em [10], para superfícies suaves imersas em esferas de dimensão ímpar. Comentamos um teorema de Montes-Verderesi, que estabelece fórmulas explícitas para o Laplaciano e para a curvatura Gaussiana de uma superfície mínima na esfera tridimensional, utilizando o ângulo de contato e o ângulo de holomorfia. Entre outras coisas essa técnica permite provar que o toro de Clifford é a única superfície mínima não Legendriana com ângulo de holomorfia constante e ângulo de contato constante na esfera pentadimensional $\mathbb{S}^5$. Enunciamos o Teorema de Montes-Verderesi que caracteriza os toros flat em $\mathbb{S}^5$ como as únicas superfícies mínimas compactas orientáveis com ângulo de holomorfia e ângulo de contato constantes.

References

[1] Blair, D. *Symplectic geometry* Springer - 2001

[2] Bursztyn, H. & Macarini, L. *Introdução à geometria simplética* IMPA - 2006

[3] Carmo, M.P. *Riemannian geometry* Birkhäuser - 1996

[4] Chern, S.S. & Wolfson, J.D. *Minimal surfaces by moving frames* American J Math - 1983

[5] Eschenburg, J. & Guadalupe, I.V. & Tribuzy, R.A. *The fundamental equations of mimimal surfaces in* $\mathbb{C}P^2$ Math Ann - 1985

[6] Kenmotsu, K. *On compact minimal surfaces with non-negative Gaussian curvature in a space of constant curvature I* Tohoku Math J - 1973

[7] Kenmotsu, K. *On compact minimal surfaces with non-negative Gaussian curvature in a space of constant curvature II* Tohoku Math J - 1975

[8] Montes, R.R. & Verderesi, J.A. *A new characterization of the Clifford torus* IME-USP - 2002

[9] Montes, R.R. & Verderesi, J.A. *Contact angle for immersed surfaces in* $\mathbb{S}^{2n+1}$ arXiv:math/0304052vl - 2003

[10] Montes, R.R. & Verderesi, J.A. *Contact angle for immersed surfaces in* $\mathbb{S}^{2n+1}$ Diff Geom and its Appl - 2007

[11] Montes, R.R. & Verderesi, J.A. *Minimal surfaces in* $\mathbb{S}^3$ *with constant contact angle* Monatsh Math - 2009

[12] Poor, W. *Differential geometric structures* McGraw-Hill - 1981

[13] Simons, J. *Minimal varieties in Riemannian manifolds* Institute for Defense Analysis - 1968

[14] Warner, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* Springer - 1983

[15] Wolf, J. *Spaces of constant curvature* Publish or Perish - 1984