Álgebra 2 - 2015 - Lista 13

Para ser entregue no dia 23 de novembro de 2015

Ao longo da lista, todas as curvas so definidas sobre um corpo algebricamente fechado k.

1. (a) Determine a curva algébrica afim $C = V(f) \subset k^2$ parametrizada por
$$x(t) = t^6 - t^2 + 1 \ , \ y(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)}.$$
   (b) Encontre um elemento $\gamma \in K(C)$ tal que $K(C) = k(\gamma)$.

2. Seja $C = V(f) \subset k^2$ uma curva de grau 3. Mostre que C possui no máximo um ponto singular e, caso possua um ponto singular, a multiplicidade deste ponto é 2.

3. Suponha que $\mathrm{char}(k) \neq 2, 5$. Seja
$$f(x) = y^5 + 5yx^2 + 2x^5 \in k[x,y] \ \text{ e } \ C = V(f) \subset k^2.$$
Determine os pontos singulares de C e suas multiplicidades.

4. Suponha que $\mathrm{char}(k) = 0$. Seja $C = V(f) \subset k^2$ uma curva algébrica afim e $P \in C$ um ponto não-singular. Dizemos que P é um *ponto de inflexão* de C se existe uma reta $\ell \subset k^2$ tal que $\mathrm{mult}_P(\ell \cap C) \geq 3$.
   (a) Nesta situação, mostre que ℓ é a reta tangente a C em P.
   (b) Suponha que $P = (0,0)$ e escreva
$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_d,$$
   onde cada $f_m \in k[x,y]$ é homogêneo de grau m.
   Mostre que P é um ponto de inflexão de C se e somente se f_1 divide f_2 em $k[x,y]$.
   (c) Seja $f(x) = x^3 + y^3 + 3xy \in k[x,y]$. Determine os pontos de inflexão de $C = V(f) \subset k^2$.