Álgebra 2 - 2015 - Lista 9

Para ser entregue no dia 19 de outubro de 2015

1. Seja k um corpo e $u \in k(t) \setminus k$. Sejam $g(t), h(t) \in k[t]$ tais que $u = \frac{g(t)}{h(t)}$ e mdc$\big(g(t), h(t)\big) = 1$ em $k[t]$. Mostre que o polinômio minimal de t sobre $k(u)$ é
$$h(x)u - g(x) \;\in\; k(u)[x].$$

2. Seja k um corpo algebricamente fechado. Usando o Teorema dos Zeros de Hilbert, mostre que os ideiais maximais do anel de polinômios $k[x_1, \ldots, x_n]$ são os ideais da forma
$$\mathfrak{m}_{\bar{a}} \;=\; \big(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\big), \quad \bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n.$$

Nos próximos exercícios k denota um corpo algebricamente fechado.
Um *conjunto algébrico* em k^n é um conjunto da forma:
$$V = V(I) = \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n \;\big|\; f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \;\; \forall f \in I\big\},$$
onde I é um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

O *ideal de* V é o ideal $I(V) = \sqrt{I} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.

O *anel de coordenadas* de V é o anel $A(V) = k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$.

Dizemos que V é *irredutível* se V não se escreve da forma $V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos algébricos em k^n diferentes de V.

3. Mostre que a união e a interseção de dois conjuntos algébricos em k^n são conjuntos algébricos em k^n.

4. Mostre que V é irredutível se e somente se $I(V)$ é um ideal primo.