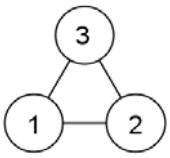
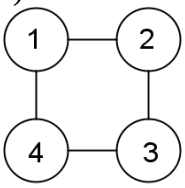
Soluções - Combinatória

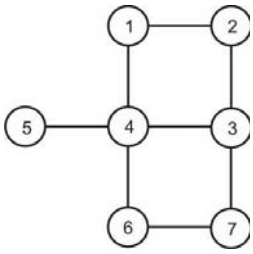
1)
Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.



b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.



1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \times 2 \times 2 = 12$.
2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \times 2 \times 1 = 6$.
No total, a figura 2 pode ser pintada de $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes.
c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos $18 \times 2 = 36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:



1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1 \times 2 = 2$ possibilidades.
2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade. No total, há $36 \times 2 + 36 \times 1 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura 3.

2) Os exemplares de "Combinatória não é difícil" deverão ser colocados em 5 das 12 localizações determinadas pelos outros livros (antes, entre ou depois) . Logo, há $C_{12,5} = 792$ maneiras.

3) Temos dois casos a analisar: (a) Ana recebe dois presentes ou (b) Ana recebe apenas a boneca. No caso(a), Ana recebe a boneca e Tio João deve distribuir os quatro presentes restantes de modo que cada criança, inclusive Ana, receba exatamente um desses presentes. Para isso, ele pode numerar os presentes(que são distintos) e escolher qual das crianças vai ganhar o primeiro presente (4 escolhas), depois qual vai ganhar o segundo (3 escolhas), depois qual vai ganhar o terceiro (2 escolhas) e finalmente qual vai ganhar o último (1 escolha). Isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes.

No caso (b), Tio João deve distribuir os presentes entre as outras três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos um presente. Desse modo, uma das crianças vai receber dois presentes e asoutras duas apenas um. O Tio João deve escolher quem vai receber dois presentes (3 escolhas). Depois disso ele dá um presente para cada uma das crianças que vão receber apenas um presente ($4 \times 3 = 12$ escolhas) e entrega os presentes restantes à criança que vai ganhar dois presentes (1 escolha). Isso pode ser feito de $3 \times 12 \times 1 = 36$ maneiras diferentes.

No total, Tio João pode distribuir os presentes de $24 + 36 = 60$ maneiras diferentes.